

## №6 Лекция

### Байланыс каналының өткізу қабілеті

Информацияны беру жылдамдығы. Өткізу қабілеті, Шеннон формуласын қолдану. Байланыс каналдары: детерминдік, бірқалыпты, екілік.

1. Санақ арқылы  $x(t)$  үздіксіз мәлімдеме,  $y(t)$  бақыланатын сигнал,  $\xi(t)$  гаусстық шуылды қарастырайық:  $\{x(i\Delta t)\}$ ,  $\{y(i\Delta t)\}$ ,  $\{\xi(i\Delta t)\}$ .  $N+1$  - өлшемді бағанды – векторлар үшін белгілеулер қабылдайық ( $T$  белгісімен)

$$X = X(i) = [x_0, \dots, x_N]^T, Y = Y(i) = [y_0, \dots, y_N]^T.$$

Осыдан кейін  $Y$  бақыланған жағдайда  $X$  мәлімдеменің информациясы былай анықталады

$$I(X \rightarrow Y) = S(Y) - S(Y/X) = - \int \dots \int \rho(Y) \ln \rho(Y) dy_0 \dots dy_N + \int \dots \int \rho(X, Y) \ln \rho(Y/X) dx_0 \dots dx_N \dots dy_0 \dots dy_N. \quad (1)$$

$S(Y/X)$  шартты энтропия көздің жадысын ескереді.

Интегралдардың көпөлшемділігі шуыл бар кезде әрбір санақ көп өлшемге ие бола алатындығымен байланысты.

Бір санақтың (символдың) информация мөлшері:

$$R = \lim_{N \rightarrow \infty} I(X \rightarrow Y) / (N + 1). \quad (2)$$

Өткізу қабілеті деп информацияны берудің максимал жылдамдығын айтамыз:

$$C = R_{max} = \lim_{N \rightarrow \infty} \max I(X \rightarrow Y) / (N + 1), \frac{\text{бит}}{\text{символ}}. \quad (3)$$

Бақыланатын сигналдың санақ моделін мына түрде ұсынуға болады

$$y(i) = x(i) + \xi(i), Y(i) = X(i) + \Xi(i), \quad (4)$$

мұнда  $\Xi(i) = [\xi_0, \dots, \xi_N]^T$  гаусстық шуылдың  $(N+1)$  - өлшемді баған – векторы.

$X(i)$ ,  $\Xi(i)$  – гаусстық шамалар болғандықтан, онда  $Y(i)$  - гаусстық ықтималдық тығыздығы бар болады:

$$\rho(Y) = (2\pi)^{\frac{-(N+1)}{2}} \det^{-\frac{1}{2}} \|V_Y\| \exp\left(-\frac{1}{2} Y^T V_Y^{-1} Y\right),$$

$$V_Y = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 + \sigma_\xi^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \sigma_X^2 + \sigma_\xi^2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

мұнда  $\det \|V_Y\| = (N + 1) (\sigma_X^2 + \sigma_\xi^2)$  - матрица анықтаушы  $V_Y$ ,  $\sigma_X^2$ ,  $\sigma_Y^2$  - сигнал және шуылдың дисперсиясы.

Осылайша шартты ықтималдылық тығыздығы анықталады  $\rho(Y/X)$ :

$$\rho(Y/X) = (2\pi)^{-\frac{(N+1)}{2}} \det^{-\frac{1}{2}} \|V_{\xi}\| \exp \left[ -\frac{1}{2} (Y - X)^T V_{\xi}^{-1} (Y - X) \right],$$

$$V_{\xi} = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \sigma_{\xi}^2 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

мұнда  $V_{\xi}$  -  $(N+1)(N+1)$  – өлшемді корреляциялық диагональді матрица.

(5), (6) формулаларын (1) формулаға қойып және ықтималдылықтардың қосындысын бірге нормалауды ескере отырып, Пуассон түріндегі интегралдарды есептеп мынаны аламыз

$$C = \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{\sigma_X^2}{\sigma_{\xi}^2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{P_X}{P_{\xi}} \right), \quad (7)$$

мұнда  $P_X, P_{\xi}$  – сигналдың және шуылдың орташа қуаты.

Біртекті сигналдар үшін белгілерді жеткізудің максимал жылдамдығы  $B_{max} = B_1 = 2\Delta f$ .  $\Delta f$  жиіліктер жолағы үшін өткізу қабілеті мынаған тең:

$$C_{\Delta f} = R_{\Delta f max} = 2\Delta f c = \Delta f \ln \left( 1 + \frac{P_X}{P_{\xi}} \right) \quad (8)$$

(8) формула Шеннон формуласы деп аталады.

Егер  $P_{\xi} = E_0 \Delta f$  қабылдасақ, мұнда  $E_0$  - шуылдың қуат спектрі,  $\Delta f \rightarrow \infty$  болғанда мынаны аламыз

$$\lim_{\Delta f \rightarrow \infty} C_{\Delta f} = \frac{P_X}{E_0} \quad (9)$$

2. Нақты байланыс каналының өткізу қабілетін анықтаудың мысалдары

Жоғалуы жоқ канал. Каналда шуыл болмасын, керісінше  $y_i$  қабылдағыштың күйлер саны, таратқыштың  $x_i$  күйлер санынан көп болсын. Элементтері байланыс каналының схемасын суреттейтін матрица қабылдайық ( $X \rightarrow Y$ ):

	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$
$x_1$	1/8	3/8	1/2	0	0	0
$x_2$	0	0	0	1/3	1/3	0
$x_3$	0	0	0	0	0	1

Әрбір бағанда бір нөлге тең емес элемент бар, одан шығатын қорытынды, кез келген қабылданған  $y_i$  де қандай сигнал  $x_i$  берілгенін анық қалпына келтіруге болады. Шартты ықтималдылық  $P(x_i/y_j)$  -  $y_i$  дің барлық мәнінде бірге немесе нөлге тең болады:

$$P(x_i) = \sum_j P(x_i/y_j) = \begin{cases} 1, \text{ если } i = 1, 2, 3 \dots \\ 0, \text{ если } i \neq 1, 2, 3 \dots \end{cases} \quad (10)$$

Егер  $y_i$  мәнін белгілеп отырсақ (шуыл жоқ кезінде апостериорлы ықтималдылықты таңдасақ) (10) нәтижесі күшінде қалады, яғни  $i_{\max} < j_{\max}$ . Сондықтан

$$S(Y/X)=0, \quad I(X \rightarrow Y) = S(X) - S(X/Y) = S(X) > 0, \quad (11)$$

мұнда  $S(X)$  – күйі аз анықталған таратқыштың энтропиясы. Осыдан кейін

$$C = -\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{3} = \log_2 3 \quad (12)$$

себебі  $X$  күйінің саны 3 ке тең ( $X=[x_1, x_2, x_3]$ ).

#### Детерминдік канал

Бұл каналда  $x_i$  таратқыштың күйлер саны  $y_i$  қабылдағыштың күйлер санынан көп. Осындай каналдың матрицасы  $x_i$  көздің әрбір жолында бір нөлге тең емес элементі бар және ол бірге тең болу керек:

	$y_1$	$y_2$	$y_3$
$x_1$	1	0	0
$x_2$	1	0	0
$x_3$	1	0	0
$x_4$	0	1	0
$x_5$	0	1	0
$x_6$	0	0	1

Осы жағдайда информацияны беру мына түрде жазылады

$$I(X \rightarrow Y) = S(X) - S(X/Y) > 0, \quad (13)$$

Сондықтан қабылдағыштың күйлерінде анықталмағандық көп,  $y_j$  белгілі күйлердің саны  $x_i$  дан аз.

$P(y_j/x_i)=0; 1$  болғандықтан  $S(X/Y)=0$  Сондықтан

$$C = \max S(Y) = \log_2 3 \quad (14)$$

Өзіндік жұмыс тақырыптары

1. Жоғарыда көрсетілген әдіс бойынша Шеннон формуласын қорыт.
2. Бірқалыпты каналдың өткізу қабілетін анықта.
3. Бірқалыпты екілік симметриялы каналдың өткізу қабілетін анықта.

Әдебиет ()